1) Scrivere un programma che fa la moltiplicazione tra matrici (Standard - Strassen)

2) Implementare Gauss - Jordan

3) Determinante

Esercizio 2 $\quad V_1 = (1,0,1,0) \quad V_2 = (h,2,h,2)$

$V_3 = (1, 1+h, 1, 2h)$

Appartengono tutti ad $\mathbb{R}^4$
anche $h \in \mathbb{R}^4$

Per quale valore di h il vettore $V = (4,1,4,2)$ è una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3

$$v = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ h \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+h \\ 1 \\ 2h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 + (1+h)\lambda_3 \\ \lambda_1 + h\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_2 + 2h\lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_2 = 4 \\ 2\lambda_2 + (1+h)\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + h\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ 2\lambda_2 + 2h\lambda_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1+h & 1 \\ 1 & h & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2h & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 4 \\ 0 & 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & 1-h & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Discussione pivot $\quad 1-h = 0 \longrightarrow +h = +1$

Se $h = 1$ allora $\quad rk\, A = 2 \quad rk\, A|B = 3$

$rk\, A \neq rk\, A|B$ quindi Rouche - Capelli ci dice che non c'è soluzione se $h \neq 1$ allora $rkA = 3$ $n = 3$

esiste una sola soluzione

Quindi per valori di $h \neq 1$ il sistema ha soluzione

Esercizio numero 3

$v_1, v_2, v_3 \in V$ lin ind

Mostrare $\{ v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1 \}$ è lin ind ?

$$W = \underbrace{\langle v_1, v_2, v_3 \rangle}_{V} \longleftrightarrow R^3$$

$$v_1 - v_2 \longleftrightarrow (1, -1, 0)$$

$$v_2 - v_3 \longleftrightarrow (0, 1, -1) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 - v_1 \longleftrightarrow (-1, 0, 1)$$

essendo 3×3 il rank è massimo se il det $\neq 0$
essendo quadrata possiamo usare Sarrus

$$r_3 = -r_1$$

$$0 \quad 1 \quad 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \det = 0$$

$$\Downarrow$$

$\{ v_1, v_2, v_3 \}$ lin. dip

$$\Downarrow$$

Quindi $\{ v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1 \}$ è linearmente dipendente

Esercizio numero 9

1) $V = <(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1),(1,1,1)>$

$$(1,2,3) = (0,1,2)+(1,1,1)$$

$$V' = <(1,1,1),(0,1,2),(0,0,1)> \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avendo il rank massimo è linearmente indipendente

Si poteva fare anche risolvendo questa matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10 n 3

$\{(1,1,0,0),(3,0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

sono linearmente indipendenti perché:

$\lambda(1,1,0,0) = (\lambda,\lambda,0,0) \neq (3,0,0,1)$

nessuno dei 2 può essere scritto come combinazione lineare dell' altro

non è un' insieme di generatori perché i vettori generati sarebbero del tipo $(\lambda,\lambda,0,\lambda)$ e quindi non può generare tutti i vettori $\in \mathbb{R}^4$

Quali sono i vettori che lo rendono una base di $\mathbb{R}^4$. Ne posso aggiungere 2 perché $n = 4$ $\mathbb{R}^4$

- Aggiungendo $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$

Verifichiamo se sono lin ind

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il rank è massimo quindi è linearmente indipendente ciò ci conferma che è una base

Esercizio 10 n 4

$V: \{(2,1,0),(0,3,1),(2,4,1),(1,2,3),(3,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Sono linearmente dipendenti perchè il numero di vettore è 5 e la dimensione è 3

Quali sono quelli inutili

togliamo $(2,4,1)$ perchè è la combinazione di $(2,1,0)$ e $(0,3,1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk = 3$ è massimo quindi i vettori:

$<(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)>$

sono una base

$V: \{(2,1,0),(0,3,1),(2,4,1),(1,2,3),(3,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

togliamo $(2,4,1)$ perchè è la combinazione di $(2,1,0)$ e $(0,3,1)$

$V: \{(2,1,0)(0,3,1),(1,2,3),(3,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 18 - 1 = -15 \neq 0$$

Esercizio 11

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{Ker}(A) =$

$\operatorname{rk} A + \underbrace{\operatorname{null}(A)}_{\dim \operatorname{Ker}(A)} = 3$ Ci serve il rango

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rk} A = 1$

$\operatorname{null}(A) = 2$

$\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$

Quale è la base associata alle prime righe?

$$\left\{ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 0 \right. \longrightarrow 2x_1 + 3x_3 = x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$